

Abiturähnliche Aufgaben – Mathe Gk, ohne CAS

Jeden Winter zieht es viele Wintersportfreunde mit Ski und Snowboard an die kleinen und großen Skihänge der Wintersportgebiete im Erzgebirge.

Ein Teil des Graphen der Funktion f mit $f(x) = e^{\frac{1}{6}x-2} \cdot \left(\frac{7}{2} - \frac{1}{8} \cdot x\right) + 5 \quad (x \in D_f)$ kann zur Beschreibung der

Profillinie einer Skipiste zwischen den Punkten A und B(0 ; f(0)) verwendet werden. Die Funktionswerte geben die jeweilige Höhe über dem Meeresspiegel an.

Der Punkt A auf dem Graphen der Funktion f liegt so, dass seine y-Koordinate der größtmöglichen Höhe über dem Meeresspiegel entspricht.

Eine Einheit entspricht 100 m.

1.1 Ermitteln Sie die Koordinaten der Punkte A und B.

Geben Sie den Definitionsbereich der Funktion f so an, dass nur der Verlauf der Profillinie der Skipiste beschrieben wird.

Geben Sie die Höhendifferenz der Skipiste an.

Erreichbare BE-Anzahl: 5

1.2 Ein Skifahrer fährt entlang der Profillinie der Skipiste vom Punkt A zum Punkt B.

Beschreiben Sie den Verlauf des Anstieges der Skipiste auf dieser Fahrt.

Bestimmen Sie die durchschnittliche Hangneigung der Profillinie zwischen den Punkten A und B in Prozent.

Hinweis: Eine Hangneigung von z.B. 40 % bedeutet, dass bei einer horizontalen Entfernung von 100 m ein Höhenunterschied von 40 m existiert.

Zur Charakterisierung von Skipisten nutzt man nicht die durchschnittliche, sondern die maximale Hangneigung.

Begründen Sie, dass dieses Vorgehen sinnvoll ist.

Entsprechend der maximalen Neigung eines Hanges unterscheidet man drei Schwierigkeitsgrade von Skipisten:

blau: leicht (für Anfänger geeignet) mit einer maximalen Neigung unter 25 %

rot: mittelschwer mit einer maximalen Neigung von 25 % bis 40 %

schwarz: anspruchsvoll (nur für Könner) mit einer maximalen Neigung über 40 %

Ermitteln Sie den Schwierigkeitsgrad der Skipiste zwischen den Punkten A und B.

Erreichbare BE-Anzahl: 8

1.3 Für ein Computerprogramm soll die Profillinie der Skipiste zwischen den Punkten A und B durch eine ganzrationale Funktion g angenähert werden.

Zwischen den Punkten A und B liegt auf der Profillinie ein Punkt, in dem die Neigung des Hanges maximal ist.

Welchen Grad muss die Funktion g mindestens haben? Begründen Sie Ihre Antwort.

Ermitteln Sie eine Gleichung der Funktion g .

Geben Sie im angegebenen Bereich die größtmögliche Differenz in den Höhen über dem Meeresspiegel zwischen der Funktion f und der Näherungsfunktion g an.

Erreichbare BE-Anzahl: 6

1.4 In einem viel besuchten Skigebiet gibt es einen Vierer-Sessel-Lift, der zu 72 % von Skifahrern genutzt wird.

Der Rest sind Snowboarder. Jeder Vierer-Sessel sei voll besetzt.

Ermitteln Sie die Wahrscheinlichkeiten folgender Ereignisse.

Ereignis A: Auf einem Vierer-Sessel fahren genau drei Skifahrer.

Ereignis B: Auf einem Vierer-Sessel fahren höchstens zwei Snowboarder.

Geben Sie an, wie viele Snowboarder man durchschnittlich auf 20 Vierer-Sesseln beobachten kann.

Erreichbare BE-Anzahl: 4

Lösung

- 1.1 A(22; 8,97) Ansatz: Maximum B(0; 5,47)
 $D_f = \{x \in \mathbb{R} \mid 0 \leq x \leq 22\}$; Höhendifferenz: $y_A - y_B = 3,5 \Rightarrow 350$ m
- 1.2. Hangneigung: (aus Sicht des Skifahrers) fallend; die Funktion ist zwischen B und A steigend
Durchschnittliche Hangneigung: $\frac{y_A - y_B}{x_A - x_B} = \frac{897m - 547m}{2200m} = \frac{15,9m}{100m} \approx 15,0\%$
steilste Stelle ist am schwierigsten zu befahren
max. Hangneigung: Maximum der Ableitungsfunktion: $H'(16; 0,243)$; d.h. 24m auf 100m
max. Steigung: 24,3% \Rightarrow blaue Piste
- 1.3. b: Ordinate(y-Wert) des Schnittpunktes der Funktion $f_{a,b}$ mit der y-Achse
Bed. I $f(0)=3 \Rightarrow$ (solve) $y = 3 - \frac{7}{2e^2}$
Bed. II $f'(x)=0 \Rightarrow x = \frac{3,5}{a} - 12 = 2 \Rightarrow a = \frac{1}{4}$
- 1.4. Binomial-Verteilung mit $n=4$; $p=0,72$; $q=1-p=0,28$
 $P(A) = \binom{4}{3} p^3 (1-p) = 0,4180$
Binomial-Verteilung mit $n=4$; $p=0,28$; $q=1-p=0,72$
 $P(B) = P(k \leq 2) = P(k=0) + P(k=1) + P(k=2) = 0,9306$
Erwartungswert $EX = 20 \cdot n \cdot p = 22,4$